# Applications - Chapitre 5

## Coordonnées cylindriques, sphériques et rotations

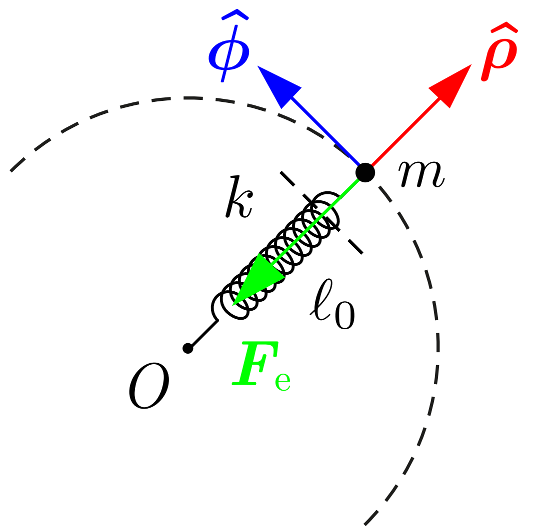
## A.5.1 Puck retenu par un ressort

## A.5.2 Puck sur un disque tournant

## A.5.1 Puck retenu par un ressort

## A.5.2 Puck sur un disque tournant

- Un puck de masse $m$ attaché à un ressort de constante élastique $k$ et de longueur à vide $\ell_0$ glisse sans frottement sur un plan horizontal.




- Force extérieure (plan horizontal) :

  1. Force élastique :

$$\boldsymbol{F}_e = -\,k\,(\rho - \ell_0)\,\hat{\boldsymbol{\rho}} \tag{A.5.1}$$

- Accélération (coordonnées polaires) :

$$\boldsymbol{a} = \left(\ddot{\rho} - \rho\,\dot{\phi}^2\right)\hat{\boldsymbol{\rho}} + \left(\rho\,\ddot{\phi} + 2\,\dot{\rho}\,\dot{\phi}\right)\hat{\boldsymbol{\phi}} \tag{A.5.2}$$

- Loi du mouvement (puck) : $\quad \boldsymbol{F}_e = m\,\boldsymbol{a}$ $\quad$ (A.5.3)

$$\text{selon } \hat{\boldsymbol{\rho}} : \quad -\,k\,(\rho - \ell_0) = m\left(\ddot{\rho} - \rho\,\dot{\phi}^2\right) \tag{A.5.4}$$

$$\text{selon } \hat{\boldsymbol{\phi}} : \quad 0 = m\left(\rho\,\ddot{\phi} + 2\,\dot{\rho}\,\dot{\phi}\right) \tag{A.5.5}$$

- Equation du mouvement tangentiel $(A.5.5)$ divisée par $m$ :

$$\rho\,\ddot{\phi} + 2\,\dot{\rho}\,\dot{\phi} = 0 \tag{A.5.6}$$

- Equation $(A.5.6)$ mise sous la forme :

$$\frac{\ddot{\phi}}{\dot{\phi}} = -\,2\,\frac{\dot{\rho}}{\rho} \qquad \xRightarrow{\cdot dt} \qquad \frac{d\dot{\phi}}{\dot{\phi}} = -\,2\,\frac{d\rho}{\rho} \tag{A.5.7}$$

- Intégration de l'équation $(A.5.7)$ : de $t = 0$ à $t$

$$\int_{\dot{\phi}_0}^{\dot{\phi}} \frac{d\dot{\phi}'}{\dot{\phi}'} = -\,2\int_{\rho_0}^{\rho} \frac{d\rho'}{\rho'} \tag{A.5.8}$$

- Résultat de l'équation intégrale $(A.5.8)$ :

$$\ln\left(\frac{\dot{\phi}}{\dot{\phi}_0}\right) = -\,2\ln\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right) \tag{A.5.9}$$

- Identités logarithmiques sur $(A.5.9)$ :

$$\ln\left(\frac{\dot{\phi}}{\dot{\phi}_0}\right) + \ln\left(\frac{\rho^2}{\rho_0^2}\right) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \ln\left(\frac{\rho^2\,\dot{\phi}}{\rho_0^2\,\dot{\phi}_0}\right) = 0 \tag{A.5.10}$$

- Exponentiation de $(A.5.10)$ :

$$\frac{\rho^2\,\dot{\phi}}{\rho_0^2\,\dot{\phi}_0} = e^0 = 1 \qquad \Rightarrow \qquad m\,\rho^2\,\dot{\phi} = m\,\rho_0^2\,\dot{\phi}_0 = \text{cste} \equiv L \qquad (A.5.11)$$

- Equation du mouvement radial $(A.5.4)$ : $\quad \dot{\phi}^2 = \dfrac{L^2}{m^2\rho^4}$

$$\ddot{\rho} + \frac{k}{m}\,(\rho - \ell_0) - \frac{L^2}{m^2\rho^3} = 0 \qquad (A.5.12)$$

- Changement de variable : $\quad r = \rho - \ell_0 \qquad \Rightarrow \qquad \ddot{r} = \ddot{\rho} \qquad (A.5.13)$
- Equation du mouvement radial $(A.5.12)$ : $\quad \omega^2 = \dfrac{k}{m}$

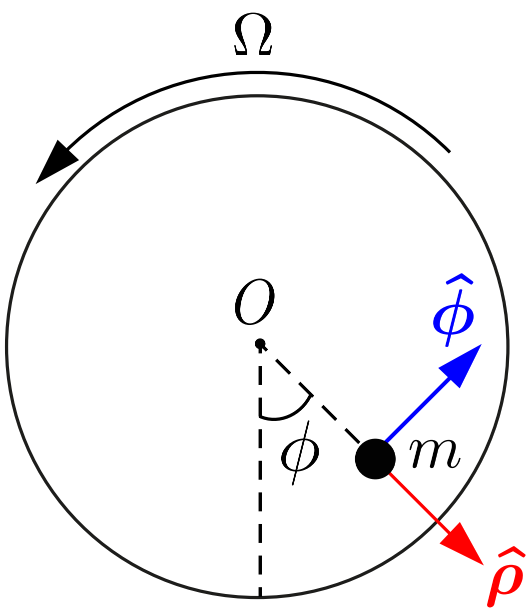
$$\ddot{r} + \omega^2\,r - \frac{L^2}{m^2\,(r+\ell_0)^3} = 0 \qquad (A.5.14)$$

1. $\phi = \text{cste} \quad \Rightarrow \quad \dot{\phi} = 0 \quad \Rightarrow \quad L = 0 \quad \Rightarrow \quad \ddot{r} + \omega^2\,r = 0$ (OH)
2. $\rho = \text{cste} \quad \Rightarrow \quad \dot{\phi} = \dfrac{L}{m\,\rho^2} = \text{cste}$ (MCU)

## A.5.1 Puck retenu par un ressort

## A.5.2 Puck sur un disque tournant

- Un puck de masse $m$ glisse sans frottement sur un disque horizontal tournant à vitesse angulaire $\Omega = \text{cste}$ dans le sens trigonométrique autour de l'axe vertical passant par son centre $O$.




- La vitesse angulaire totale $\Omega + \dot{\phi}$ est la somme de la vitesse angulaire $\Omega$ de rotation disque par rapport au sol et de la vitesse angulaire $\dot{\phi}$ de rotation du puck par rapport au disque.
- Il n'y a pas de force extérieure dans le plan horizontal. L'accélération dans le plan horizontal est nulle :

$$\boldsymbol{a} = \left(\ddot{\rho} - \rho\left(\Omega + \dot{\phi}\right)^2\right)\hat{\boldsymbol{\rho}} + \left(\rho\,\ddot{\phi} + 2\,\dot{\rho}\left(\Omega + \dot{\phi}\right)\right)\hat{\boldsymbol{\phi}} = \boldsymbol{0} \qquad (A.5.15)$$

$$\text{selon } \hat{\boldsymbol{\rho}} : \quad \ddot{\rho} - \rho\left(\Omega + \dot{\phi}\right)^2 = 0 \qquad (A.5.16)$$

$$\text{selon } \hat{\boldsymbol{\phi}} : \quad \rho\,\ddot{\phi} + 2\,\dot{\rho}\left(\Omega + \dot{\phi}\right) = 0 \qquad (A.5.17)$$

- Composante de l'accélération selon $\hat{\phi}$ nulle :

$$\rho\,\ddot{\phi} + 2\,\dot{\rho}\left(\dot{\phi} + \Omega\right) = 0 \qquad (A.5.17)$$

- Equation $(A.5.17)$ mise sous la forme :

$$\frac{\ddot{\phi}}{\dot{\phi} + \Omega} = -\,2\,\frac{\dot{\rho}}{\rho} \qquad \xrightarrow[d\Omega\,=\,0]{\cdot dt} \qquad \frac{d\left(\dot{\phi} + \Omega\right)}{\dot{\phi} + \Omega} = -\,2\,\frac{d\rho}{\rho} \qquad (A.5.18)$$

- Intégration de l'équation $(A.5.18)$ : de $t = 0$ à $t$

$$\int_{\dot{\phi}_0+\Omega}^{\dot{\phi}+\Omega} \frac{d\left(\dot{\phi}' + \Omega\right)}{\dot{\phi}' + \Omega} = -\,2\int_{\rho_0}^{\rho} \frac{d\rho'}{\rho'} \qquad (A.5.19)$$

- Résultat de l'équation intégrale $(A.5.19)$ :

$$\ln\left(\frac{\dot{\phi} + \Omega}{\dot{\phi}_0 + \Omega}\right) = -\,2\,\ln\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right) \qquad (A.5.20)$$

- Identités logarithmiques sur $(A.5.20)$ :

$$\ln\left(\frac{\Omega+\dot{\phi}}{\Omega+\dot{\phi}_0}\right)+\ln\left(\frac{\rho^2}{\rho_0^2}\right)=0$$

$$\Rightarrow \quad \ln\left(\frac{\rho^2\left(\Omega+\dot{\phi}\right)}{\rho_0^2\left(\Omega+\dot{\phi}_0\right)}\right)=0 \qquad (A.5.21)$$

- Exponentiation de $(A.5.21)$ :

$$\frac{\rho^2\left(\Omega+\dot{\phi}\right)}{\rho_0^2\left(\Omega+\dot{\phi}_0\right)}=e^0=1$$

$$\Rightarrow \quad m\,\rho^2\left(\Omega+\dot{\phi}\right)=m\,\rho_0^2\left(\Omega+\dot{\phi}_0\right)=\text{cste}\equiv L \qquad (A.5.22)$$

où $L$ est la norme du moment cinétique du puck par rapport à l'origine.

- On dépose le puck en position $\rho_0 > 0$ sans vitesse initiale par rapport au disque ($\dot{\phi}_0 = 0$) :

$$(A.5.22) \quad \Rightarrow \quad \dot{\phi} = -\left(1 - \frac{\rho_0^2}{\rho^2}\right)\Omega \tag{A.5.23}$$

- En substituant $(A.5.23)$ dans l'équation du mouvement radial $(A.5.16)$ :

$$\ddot{\rho} = \rho\left(\cancel{\Omega} - \left(\cancel{1} - \frac{\rho_0^2}{\rho^2}\right)\Omega\right)^2 = \frac{\rho_0^4}{\rho^3}\,\Omega^2 > 0 \tag{A.5.24}$$

- L'accélération radiale est positive, i.e. $\ddot{\rho} > 0$, ainsi la coordonnée de position radiale $\rho$ augmente. Ainsi, d'après la relation $(A.5.23)$, la vitesse angulaire $\dot{\phi}$, initialement nulle, devient de plus en plus négative.
- Vitesse angulaire relative limite $(t \to \infty)$ :

$$\lim_{t\to\infty} \dot{\phi} = \lim_{t\to\infty} -\left(1 - \underbrace{\frac{\rho_0^2}{\rho^2}}_{\to 0}\right)\Omega = -\,\Omega \tag{A.5.25}$$

- On multiplie l'équation du mouvement radial $(A.5.24)$ par la vitesse radiale $\dot{\rho}$ :

$$\dot{\rho}\,\ddot{\rho} - \,\rho_0^4\,\Omega^2\,\frac{\dot{\rho}}{\rho^3} = 0 \qquad (A.5.26)$$

- En multipliant l'équation $(A.5.26)$ par $dt$ :

$$\dot{\rho}\,d\dot{\rho} - \,\rho_0^4\,\Omega^2\,\frac{d\rho}{\rho^3} = 0 \qquad (A.5.27)$$

- Intégration de l'équation $(A.5.27)$ : de $t = 0$ à $t$

$$\int_{\dot{\rho}_0}^{\dot{\rho}} \dot{\rho}'\,d\dot{\rho}' - \,\rho_0^4\,\Omega^2 \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{d\rho'}{\rho'^{\,3}} = 0 \qquad (A.5.28)$$

- Résultat de l'équation intégrale $(A.5.28)$ : multiplié par la masse $m$

$$\frac{1}{2}\,m\left(\dot{\rho}^2 - \,\dot{\rho}_0^2\right) + \frac{1}{2}\,m\,\rho_0^4\,\Omega^2\left(\frac{1}{\rho^2} - \,\frac{1}{\rho_0^2}\right) = 0 \qquad (A.5.29)$$

- L'équation $(A.5.29)$ peut être mise sous la forme :

$$\frac{1}{2}\,m\,\dot{\rho}^2 + \frac{1}{2}\,m\,\frac{\rho_0^4}{\rho^2}\,\Omega^2 = \frac{1}{2}\,m\,\dot{\rho}_0^2 + \frac{1}{2}\,m\,\rho_0^2\,\Omega^2 = \text{cste} \equiv T \qquad (A.5.30)$$

où $T$ est l'énergie cinétique du puck par rapport au sol.

- En élevant $(A.5.22)$ au carré et en divisant par $m^2$ avec $\dot{\phi}_0 = 0$ :

$$\rho_0^4\left(\Omega + \dot{\phi}_0\right)^2 = \rho^4\left(\Omega + \dot{\phi}\right)^2 \quad \text{ainsi} \quad \frac{\rho_0^4}{\rho^2}\,\Omega^2 = \rho^2\left(\Omega + \dot{\phi}\right)^2 \qquad (A.5.31)$$

- En substituant $(A.5.31)$ dans $(A.5.30)$ avec $\dot{\phi}_0 = 0$, on obtient :

$$\frac{1}{2}\,m\left(\dot{\rho}^2 + \rho^2\left(\Omega + \dot{\phi}\right)^2\right) = \frac{1}{2}\,m\left(\dot{\rho}_0^2 + \rho_0^2\left(\Omega + \dot{\phi}_0\right)^2\right) \equiv T \qquad (A.5.32)$$

- Ainsi, la norme de la vitesse est constante :

$$\boldsymbol{v}^2 = \left(\dot{\rho}^2 + \rho^2\left(\Omega + \dot{\phi}\right)^2\right) = \left(\dot{\rho}_0^2 + \rho_0^2\left(\Omega + \dot{\phi}_0\right)^2\right) = \boldsymbol{v}_0^2 \qquad (A.5.33)$$